平成 15 年度 解析学 C　（須川敏幸 担当）

2004 年 2 月 6 日実施　期末試験問題

解答および講評

[1] a, b を 0 でない実数とするとき，次の定積分の値を留数解析を用いて求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx$$

（解）標準的な問題．a, b の符号を変えても積分値は変化しないので $a > 0, b > 0$ と仮定して計算を進めてよい.（ただし，最後に a, b を $|a|, |b|$ で置き換える必要がある．このことに注意を払っている答案はあまり見られなかった．数学を志すのであれば，こういう細かいところにも気を遣ってもらいたい.）有理型函数

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$$

を考えればよい.（直接 $\cos az/(z^2+b^2)$ を考えようとすると，適当な積分路を取ってそれを無限遠に飛ばす際に困難が生じる.）$f(z)$ の極は $z = \pm bi$ のみであり，$z = bi$ における留数は

$$\mathrm{Res}(f, bi) = \left.\frac{e^{iaz}}{z+bi}\right|_{z=bi} = \frac{e^{-ab}}{2bi}$$

となる．まず $R > |b|$ として半円板 $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ において留数定理を適用すると，その内部の極は bi のみだから，

$$\int_{\partial\Omega_R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ab}}{2bi} = \frac{e^{-ab}}{b} \tag{1}$$

を得る．ここで，半円板の上部の円弧を $\gamma_R : z = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi,$ と置いた．γ_R 上では $dz = iRe^{i\theta}d\theta$ より，$|dz| = Rd\theta$ だから，

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_0^{\pi} |f(Re^{i\theta})|Rd\theta \le \int_0^{\pi} \frac{e^{-R\sin\theta}}{R^2-b^2}Rd\theta \le \frac{\pi R}{R^2-b^2}$$

となり，最後の項は $R \to \infty$ とすれば 0 に収束する．よって，式(1) において $R \to \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi e^{-ab}}{b}$$

を得る．両辺の実部を取り，さらに $a > 0, b > 0$ という仮定を外せば，最終的に次の式を得る．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi e^{-|ab|}}{|b|}$$

[2] 留数解析を用いて次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

（解）この問題も色々な技法が使えるとは思うが，一つだけ紹介しておく．$0 < \varepsilon < R < \infty$ としておく．まず，倍角公式から $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ であることに注意すると

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \mathrm{Re}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{1-e^{2ix}}{2x^2}dx$$

である．$f(z) = (1-e^{2iz})/2z^2$ と置いておく．領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ においてコーシーの積分公式を適用すると，$\gamma_t : \theta \mapsto te^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi,$ として，

$$\left(\int_{\varepsilon}^{R} + \int_{\gamma_R} + \int_{-R}^{-\varepsilon} - \int_{\gamma_\varepsilon}\right) f(z)dz = 0 \tag{2}$$

となる．ここで $z \to 0$ の時

$$\frac{1-e^{2iz}}{2z^2} = \frac{1-(1+2iz+(2iz)^2/2+\cdots)}{2z^2} = -\frac{i}{z} + O(1)$$

であることに注意すると，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \int_0^\pi \left[-\frac{i}{\varepsilon e^{i\theta}} + O(1)\right] i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi [1+O(\varepsilon)]d\theta = \pi + O(\varepsilon)$$

となることが分かる．一方，γ_R 上では $|e^{iRe^{i\theta}}| = e^{-R\sin\theta} \le 1$ であることに注意すると，

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \frac{2}{2R^2} R d\theta = \frac{\pi}{R}$$

であることが分かる．従って，式(2) において $\varepsilon \to 0, R \to \infty$ とすれば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty} \left(\int_\varepsilon^R + \int_{-R}^{-\varepsilon}\right) f(x)dx = \pi$$

が得られる.（この左辺はコーシーの主値と呼ばれるものである.）ここで $f(x)$ の実部は偶函数であることに注意して両辺の実部を取れば，

$$2\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi \quad すなわち \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

が得られ，答えが出る．

[3] 留数解析を用いて次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{1+x^2} dx$$

（解）この問題を解くには厳密には「解析接続」や「多価函数」といった概念が必要になるので，その意味ではやや高度な問題であった．$0 < \varepsilon < 1 < R < \infty$ とする．この問題では領域 $0 < \arg z < 2\pi, \varepsilon < |z| < R$ を用いるのが標準的であるが，ほとんど多価函数を考えることになるので，ここではそれを避けて領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ を考えることにする．$f(z) = z^{1/3}/(1+z^2)$ とすれば，これは Ω 上の正則函数となる.（ここで，$z^{1/3}$ はたとえば $\exp((1/3)\log z)$ と考えればよい.）正の実数値 x については $f(x)$ は正の実数値を取るものとする．ここで注意しなければならないのは，このように f を取ったとき，Ω の境界点 $x < 0$ においてはもはや $-x^{1/3}/(1+x^2)$ ではないということである．この点で躓いている答案が非常に多かった．対数函数は Ω の負の実数の境界点 x においては，$\log|x| + \pi i$ という値を取っている（この値に解析接続される）．従って，

$$f(x) = \frac{\exp((1/3)\log|x| + \pi i/3)}{1+x^2} = e^{\pi i/3} f(|x|)$$

という関係が成り立つ．このことに注意して，Ω において留数定理を適用する．ここでの極は $z = i$ のみであり，その留数は

$$\mathrm{Res}(f, i) = \frac{e^{\pi i/6}}{2i}$$

である．従って，$\gamma_t : \theta \mapsto te^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi,$ として，留数定理より

(3)
$$\left(\int_\varepsilon^R + \int_{\gamma_R} + \int_{-R}^{-\varepsilon} - \int_{\gamma_\varepsilon}\right) f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi i/6}}{2i} = \pi e^{\pi i/6}$$

となる．ここで，いつものように評価すると

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \frac{R^{1/3}}{R^2-1} R d\theta = \frac{\pi R^{4/3}}{R^2-1} = O(R^{-2/3}) = o(1) \quad (R \to \infty)$$

かつ

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \le \int_0^\pi \frac{\varepsilon^{1/3}}{1-\varepsilon^2} \varepsilon d\theta = O(\varepsilon^{4/3}) = o(1) \quad (\varepsilon \to 0)$$

が得られる．さらに，先の注意から

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)dx = e^{\pi i/3} \int_{-R}^{-\varepsilon} f(|x|)dx = e^{\pi i/3} \int_\varepsilon^R f(x)dx$$

となるので，式(3) において極限を取れば，

$$(1+e^{\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx = \pi e^{\pi i/6}$$

を得る．従って，

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx = \pi\frac{e^{\pi i/6}}{1+e^{\pi i/3}} = \frac{\pi}{e^{\pi i/6}+e^{-\pi i/6}} = \frac{\pi}{2\cos(\pi/6)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

となる．

[4] 多項式 $f(z) = 2z^6 - z^5 - 8z^2 + 1$ は円板 $|z| < 1/2$ 内にちょうど 2 個の零点を持つことを示せ．

（解）この問題は予想以上に出来が良かった．ポイントはルーシェの定理を使うことにあるが，もう一つの多項式の取り方には非常に自由度があるので，ここでは典型的なもので説明する．$g(z) = -8z^2$ と置くと，g は円板 $|z| < 1/2$ 内に（重複度も考慮して）ちょうど 2 個の零点を持つ．一方，$|z| = 1/2$ において

$$|f(z) - g(z)| \le 2|z|^6 + |z|^5 + 1 = 1/16 + 1 = 17/16 < 2 = |g(z)|$$

であるから，ルーシェの定理が使える状況である．よって $f(z)$ の $|z| < 1/2$ における零点の個数は g のそれと同じで 2 個である.（$g(z) = -8z^2 + 1$ などでもよい．与えられた範囲（本問題では $|z| < 1/2$）において $f(z)$ をよく近似し，なおかつ零点の計算が容易な函数を $g(z)$ に選べばよい.）

[5] メビウス変換

$$\varphi(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

は，右半平面 $H = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\, z > 0\}$ を単位円板 $\mathbb{D}$ に等角写像する（正則かつ同相に写像する）ことを示せ．

（解）メビウス変換が（リーマン球面からそれ自身への写像として）正則であること，一対一であることなどは認める．すると，要は $\varphi(H) = \mathbb{D}$ であることが示されれば十分ということである．これには様々な証明法が考えられるが，ここでは一つだけ紹介する．$|\varphi(z)| < 1$ であることは，$|z-1| < |z+1|$ であることと同値である．この式は z から 1 までの距離の方が，z から -1 までの距離よりも小さいことを意味するが，そのような点はちょうど $1, -1$ の垂直二等分線である虚軸よりも右側全体になっていて，それは H にほかならない．よって，$\varphi(z) \in \mathbb{D} \Leftrightarrow z \in H$ が示された．

[6] 有理型函数

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

について，$y \to +\infty$ とするとき，$x \in \mathbb{R}$ について一様に $f(x+iy) \to 0$ となることを証明せよ．

（解）まず $f(z)$ は周期 1 を持つ，すなわち $f(z+1) = f(z)$ が恒等的に成り立つので，$0 \le x \le 1$ について一様に $f(x+iy) \to 0$ となることを示せば十分である．すなわち，任意に与えられた正数 ε に対して，x によらない定数 $M > 0$ で，$y > M$ である限り $|f(x+iy)| < \varepsilon$ が任意の $0 \le x \le 1$ について成り立つようなものを見つければよい．まず，$\sum_{n=1}^\infty (1/n^2) < \infty$ であることに注意すると，ある自然数 N が存在して $\sum_{n=N}^\infty (1/n^2) < \varepsilon/4$ となる．n を 0 でない整数とすれば任意の $0 \le x \le 1$ に対して

$$|x+iy-n|^2 = (x-n)^2 + y^2 \ge (x-n)^2 \ge (|n|-x)^2 \ge (|n|-1)^2$$

が成り立つことに注意する．同様にして $|x+iy-n|^2 \ge y^2$ も得る．よって，$M > 0$ を $(2N+1)/M^2 < \varepsilon/2$ となるように十分大きくとれば，$y > M$ に対して

$$\begin{aligned}|f(x+iy)| &\le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|(x+iy)-n|^2} = \sum_{|n|\le N} + \sum_{|n|>N} \\ &\le \frac{2N+1}{y^2} + \sum_{|n|>N}\frac{1}{(|n|-1)^2} \le \frac{2N+1}{M^2} + 2\sum_{n=N}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\end{aligned}$$

が得られ，所期の不等式が示された．

[7] 関係式

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

を用いて次の値を求めよ：

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

（解）両辺に $z = 1/2$ を代入すれば，関係式

$$\pi^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-1/2)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{4}{(2n-1)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2} = 8A$$

を得る．よって $A = \pi^2/8$ がまず得られる．ついで，B の定義から

$$B = \sum_{n:\text{even}} + \sum_{n:\text{odd}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{B}{4} + A$$

が得られる．A の値を代入して整理すればよく知られた値 $B = \pi^2/6$ を得る．

[8] 次の公式を証明せよ．

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$$

（解）$\prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k})$ の形を求めて，帰納的にそれを示すことによる証明が多かったが，おそらく次のようにやるのが最も簡単である．

$$\begin{aligned}(1-z)\prod_{k=0}^{n}(1+z^{2^k}) &= (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdots(1+z^{2^n}) \\ &= (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)\cdots(1+z^{2^n}) \\ &= (1-z^4)(1+z^4)\cdots(1+z^{2^n}) \\ &= \cdots = 1-z^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

として，$n\to\infty$ とすれば求める式を得る．

[9] $a\in\mathbb{C}$ および $b>0$ を定数とする．領域 Ω 上の正則函数 f で，Ω 上で条件 $|f(z)-a|>b$ を満たすもの全体のなす函数族を $\mathcal{F}$ とする．f_n $(n=1,2,\cdots)$ を $\mathcal{F}$ の任意の函数列とするとき，ある部分列 f_{n_k} が取れて，f_{n_k} が Ω において，ある正則函数 f に広義一様収束するか，または $|f_{n_k}|$ が Ω において広義一様に $+\infty$ に収束することを証明せよ．

（解）ポイントはモンテルの定理に持ち込むことであるが，たとえば次のようにすればよい．f_n を $\mathcal{F}$ における函数列とし，$g_n = b/(f_n-a)$ とすると仮定から $|g_n(z)|<1$ が領域 Ω 上で成り立つ．よって，モンテルの定理により g_n から広義一様収束する部分列 g_{n_k} を選ぶことができる．極限函数を g とすると，ワイエルシュトラスの二重級数定理により g も Ω において正則である．まず g が恒等的に 0 であったとすると，$f_n = a + b/g_n$ であるから $|f_{n_k}|$ は $+\infty$ に広義一様収束することになる．そこで g が恒等的に 0 でなかったとしよう．すると，各 $z\in\Omega$ および各 k に対して $g_{n_k}(z)\neq 0$ であるから，Hurwitz の定理によって $g(z)=0$ となる点は Ω 内には存在しない．従って $f = a + b/g$ も Ω 上の正則函数となり，g_{n_k} が g に広義一様収束するから，f_{n_k} も f に広義一様収束する．