平成 15 年度 解析学 C　（須川敏幸 担当）

2003 年 11 月 14 日実施　中間試験問題

解答および講評

[1] $\dfrac{1}{z^5 \cos z}$ の $z=0$ における留数を求めよ．

（解）上記の函数を $f(z)$ とすると，これは $z=0$ において 5 位の極を持つので，公式

$$\mathrm{Res}(f(z),0) = \left(\frac{d}{dz}\right)^4 (z^5 f(z))\Big|_{z=0} = \left(\frac{d}{dz}\right)^4 \left(\frac{1}{\cos z}\right)\Big|_{z=0}$$

を用いて計算することもできるが，計算が煩雑になり，実際この方法で正答に達していた答案は比較的少なかった．（なお，答案に散見されたので注意しておくと，$\cos z$ の 2 乗は確かに $\cos^2 z$ などと書かれるが，逆数つまり -1 乗については慣習上 $\cos^{-1} z$ などとは書かないことに注意する．これは逆三角函数を表すのに用いられることがあるからである．）

留数を計算する早道はケース・バイ・ケースであるが，この場合は級数展開を利用するのが良いだろう．

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = 1 - \omega$$

と置くと，

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^{-5}}{1-\omega} = z^{-5}\left[1 + \omega + \omega^2 + \cdots\right] \\
&= z^{-5}\left[1 + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{2} + O(z^4)\right)^2 + O(z^6)\right] \\
&= z^{-5}\left[1 + \frac{z^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) z^4 + O(z^6)\right] \\
&= \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2z^3} + \frac{5}{24z} + O(z)
\end{aligned}$$

と計算できる．ただし，ここで $O(z^k)$ という記号はランダウ記号の乱用であるが，z^k 以上の項からなるベキ級数であることを意味するものである．（代数学の用語を用いれば，z^k で生成されたイデアルに含まれる元を modulo することに相当する．）これより，$\mathrm{Res}(f(z),0) = \frac{5}{24}$ と計算できる．

[2] 次の定積分の値を計算せよ．ただし a は $0 < a < 1$ を満たす実定数とする．

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}.$$

（解）標準的な問題であるが，案外計算間違いしている答案が多かった．答えが合っているかどうかは，a に特別な値を代入してみることによってチェックできる場合がある．（例えば $a=0$ など．）時間に余裕がある場合は試してみるべきだろう．これをするだけで，単純ミスは結構防げる．

普通の解法は，$z = e^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi,$ と置いて，$d\theta = idz/z$ と置換積分し，$\cos\theta = (z+1/z)/2$ に注意して

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - a(z+1/z) + a^2} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}$$

とするものである．ここで，被積分函数の極は $z = a, 1/a$ の 2 個で，そのうち単位円板内に含まれるのは a のみである．そこでの留数は $1/(1-a^2)$ であるので，留数定理より

$$I = \frac{2\pi i}{i} \cdot \frac{1}{1-a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

と計算される．

なお，別解としては $\zeta = ae^{i\theta}$ とすれば

$$\frac{1-a^2}{1-2a\cos\theta + a^2} = \mathrm{Re}\,\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

であるから，

$$(1-a^2)I = \mathrm{Re}\int_{|\zeta|=a} \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

を得るので，これに留数定理を用いる方法がある．

[3] 次の定積分の値を計算せよ．

$$I=\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

（解）これも標準的な問題であるが，留数計算など間違いやすいので注意が必要である．少なくとも，積分値は正の値であるのは明らかだから，結果が負になったり虚数になったり 0 になったりすれば間違いだと気が付くべきである．

函数 $f(z)=(1+z^2)/(1+z^4)$ の極は分母の根，つまり -1 の 4 乗根であるから，$(\pm1\pm i)/\sqrt{2}$（複合任意）の 4 個あるが，このうち上半平面にあるものは $(\pm1+i)/\sqrt{2}$ の 2 個である．それらの点における留数を計算するには，講義では紹介しなかったが次の公式が便利である．この機会に憶えておくとよい．

$g(z),h(z)$ を $z=z_0$ において正則な函数で，$h(z_0)=0, h'(z_0)\neq 0$ と仮定する．このとき，函数 $f(z)=g(z)/h(z)$ の $z=z_0$ における留数は

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

である．

これを用いると $\zeta=(\pm1+i)/\sqrt{2}$ における $f(z)$ の留数は

$$\mathrm{Res}(f(z),\zeta)=\frac{1+\zeta^2}{4\zeta^3}=\frac{1}{2\sqrt{2}i}$$

となることが分かる．従って，$R>1$ に対して曲線 $\gamma_R(\theta)=Re^{i\theta}$ $(0\le\theta\le\pi)$ として留数定理を適用すると

$$\int_{-R}^R f(x)dx+\int_{\gamma_R}f(z)dz=2\pi i\left[\frac{1}{2\sqrt{2}i}+\frac{1}{2\sqrt{2}i}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が得られる．ここで，$|z|=R>1$ に対して $|f(z)|\le(1+R^2)/(R^4-1)$ であることに注意すれば，$R\to+\infty$ の時,

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)dz\right|\le\int_{\gamma_R}|f(z)||dz|\le\frac{R^2+1}{R^4-1}\cdot\pi R\to 0$$

となることが分かる．従って，上式で $R\to+\infty$ として

$$2I=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得るので，$I=\pi/2\sqrt{2}$ が従う．

[4] n を非負整数とする．整函数 $f(z)$ が条件 $f(z)=o(|z|^{n+1}),\ |z|\to\infty,$ を満たす，すなわち

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,f)}{r^{n+1}}=0,\quad M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|,$$

を満たすならば，$f(z)$ は高々n 次の多項式であることを示せ．

（解）これは Liouville の定理の一般化で，証明もほぼ同様にしてできるが，なぜか正解者はいなかった．f は整函数なので，複素平面上で収束するベキ級数 $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$ に展開できる．Cauchy の積分定理により係数 a_k は

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz$$

と表現できる．従って，$R\to+\infty$ とするとき

$$|a_k|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}}|dz|\le\frac{M(R,f)}{R^k}=o(R^{n+1-k})$$

となる．特に $k\ge n+1$ のとき，$a_k=0$ でなければならず，これは $f(z)$ が高々n 位の多項式であることを意味する．

[5] 有界領域 Ω において正則な函数 $f(z)$ が，ある定数 M に対して

$$\limsup_{z\to\zeta,z\in\Omega}|f(z)|\le M$$

を Ω の境界上の任意の点 ζ について満足しているとすると，$|f(z)|\le M$ が Ω 内において成り立つことを証明せよ．（最大絶対値原理の強形）

（解）この問題は解こうとした者は多かったが，正解者はいなかった．仮定の意味がしっかり理解できていた者がほとんどいなかったのではないかと思われる．ここで確認をしておくが，条件にある上極限は通常の上極限の類似で，ただ動きうる変数 z が Ω 内に制限されているのが違うだけである．正確に書けば，

$$\limsup_{z\to\zeta,z\in\Omega}|f(z)|=\lim_{r\to+0}\left(\sup_{z\in\mathbb{D}(\zeta,r)\cap\Omega}|f(z)|\right)$$

ということである．さて，問題の条件が言っていることは何かというと，任意に固定した $\varepsilon > 0$ と各点 $\zeta \in \partial\Omega$ に対してある $r(\zeta) > 0$ があって，

$$\sup_{z \in \mathbb{D}(\zeta, r(\zeta)) \cap \Omega} |f(z)| < M + \varepsilon$$

が成り立つということである．開円板族 $\{\mathbb{D}(\zeta, r(\zeta))\}_{\zeta \in \partial\Omega}$ は境界 $\partial\Omega$ の開被覆をなすが，ここで仮定から $\partial\Omega$ は有界閉集合，すなわちコンパクトであるから，有限な部分被覆を取ることができる．それに対応する中心点を $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ とし，$D = \mathbb{D}(\zeta_1, r(\zeta_1)) \cup \cdots \cup \mathbb{D}(\zeta_k, r(\zeta_k))$ とおくと，従って $\partial\Omega \subset D$ である．すると，取り方から $D \cap \Omega$ においては $|f(z)| < M + \varepsilon$ であるから，特にその相対境界 $\partial D \cap \Omega$ においては $|f(z)| \le M + \varepsilon$ が成り立つ．よって，相対コンパクトな部分領域 $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{D}$ の境界において $|f(z)| \le M + \varepsilon$ が成り立つことになり，通常の最大値原理から，同じ不等式が Ω_0 全体でも成り立つことになる．$\Omega \setminus \Omega_0 = \bar{D} \cap \Omega$ においては，既に $|f| \le M + \varepsilon$ であることが分かっていたので，結局 Ω 全体で $|f| \le M + \varepsilon$ が成り立つことになるが，ここで ε が任意であったことに注意すると，結局 $|f| \le M$ が Ω 上で成立することが結論できる．

[6] 有理函数

$$f(z) = \frac{z-2}{z^3 - z^2 + 2z}$$

の原点におけるローラン展開を求めよ．

（解）本問は，実は当初の出題意図と違って，分母が綺麗に因数分解できない形になってしまった．そのせいか，満足できる解答はなかったようであるが，これは出題者にも責任があろう．ということで，具体的に数項求めた答案でも部分点を与えた．一方で，コーシーの積分公式などを使って抽象的な係数の表現を与えただけの答案にはほとんど部分点は与えていない．なぜなら，そのような方法で計算が簡易化できる可能性はこの場合は少ないからである．

まず，$f(z)$ は $z = 0$ において 1 位の極を持つことから，

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n z^n$$

の形にローラン展開できることが分かる．以下，係数 a_n を求めることを考える．最初に分母を因数分解することを考えると，

$$z^3 - z^2 + 2z = z(z^2 - z + 2) = z(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}), \quad \alpha = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}$$

となる．最後まで因数分解するとちょっと厄介そうなので，まず中間の因数分解でとどめておいて考えることにする．すると，まず

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{z}{z^2 - z + 2}$$

と部分分数分解できる．第二項を

$$\frac{z}{z^2 - z + 2} = \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{1 - \omega}, \quad \omega = \frac{z - z^2}{2} = \frac{z(1-z)}{2}$$

と書き換える．すると，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\omega} &= \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m (1-z)^m}{2^m} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} z^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} z^k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k 2^{-m} \binom{m}{k} z^{m+k}
\end{aligned}$$

となる．ここで $n = m + k$ として，総和の変数を (m, k) から (n, k) に置き換えると，$0 \le 2k \le m + k = n$ であるから，$[\cdot]$ を Gauss 記号として，

$$\frac{1}{1-\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k 2^{k-n} \binom{n-k}{k} z^n$$

となるので，これを $f(z)$ の展開式に代入して，

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 2^{k-n}\binom{n-k}{k}z^n \\ &= -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k 2^{k-n-1}\binom{n-k}{k}z^{n+1} \\ &= -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k 2^{k-n}\binom{n-k-1}{k}z^n \end{aligned}$$

を得る．従って，$a_{-1} = -1, a_0 = 0$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k 2^{k-n}\binom{n-k-1}{k} \quad (n \geq 1)$$

であることが分かった．

この表現では，まだ総和記号が残るため，完全に明示的な表現ではないと言えるかもしれない．総和記号も含めて計算を遂行するには，虚数を用いた因数分解を用いるしかない．まず $z/(z^2 - z + 2)$ を部分分数分解するために，定数 A, B を

$$\frac{z}{z^2 - z + 2} = \frac{A}{z - \alpha} + \frac{B}{z - \bar{\alpha}}$$

すなわち $z = A(z - \bar{\alpha}) + B(z - \alpha)$ が恒等的に成り立つように定める．計算すると，容易に

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \bar{\alpha}}, \quad B = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \alpha} = \bar{A}$$

であることが分かる．従って，

$$\frac{z}{z^2 - z + 2} = \frac{\alpha}{\alpha - \bar{\alpha}} \cdot \frac{1}{z - \alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \alpha} \cdot \frac{1}{z - \bar{\alpha}}$$

となる．そこで，まず第一項を計算すると

$$\frac{\alpha}{\alpha - \bar{\alpha}} \cdot \frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{\bar{\alpha} - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - z/\alpha} = \frac{1}{\bar{\alpha} - \alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n$$

であることが分かり，同様に

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha} - \alpha} \cdot \frac{1}{z - \bar{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - \bar{\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\bar{\alpha}}\right)^n$$

も得られる．従って，

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{\alpha} - \alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n - \left(\frac{z}{\bar{\alpha}}\right)^n\right] = -\frac{1}{z} + \frac{i}{\sqrt{7}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\bar{\alpha}^n}\right]z^n$$

となり，最終的に

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{7}}\left[\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\bar{\alpha}^n}\right] \quad (n \geq 0)$$

が得られる．ただ，これだと，$n \to \infty$ の時の漸近挙動などを観察するには良いが，具体的に $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を求めていくのは容易ではなく，最初の表現もそれなりに利点がある．

[7] $f(z)$ を単位円板 $|z| < 1$ において正則で $|f(z)| < 1$ を満たす函数とすると，

$$\left|\frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}\right| \leq |z|, \quad |z| < 1,$$

が成り立つことを証明せよ．

（解）この問題も意外にも完答者がいなかった．シュワルツの補題に関係があることは誰の目にも明らかであるが，本問ではシュワルツの補題を適用するための前提になる条件 $f(0) = 0$ が仮定されていないことに注意する．しかし，講義（前期）でも例示したように，$|z| < 1, |a| < 1$ ならば，$|(z - a)/(1 - \bar{a}z)| < 1$ が成り立つことを思い出すと，新たに定義される函数

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$$

は，単位円板上で正則であり $|g(z)| < 1$ を満たすことが分かる．しかも，この場合は構成の仕方から，$g(0) = 0$ となってシュワルツの補題が適用できることになる．従って，$|g(z)| \leq |z|$ が得られるが，これが欲しかった結論に他ならない．