平成 15 年度 解析学 B　（須川敏幸 担当）

2003 年 7 月 25 日実施　期末試験問題　解答例および講評

[1] 指数函数に関して次の不等式を示せ．$|e^z - 1| \le e^{|z|} - 1 \le |z|e^{|z|}, \quad z \in \mathbb{C}$

（解答）前半の証明には $z = x + iy$ として指数法則とオイラーの公式を使って解こうとする答案もあったが，成功しているものはなかったようである．なお，三角不等式を使おうとするものも散見され，ほとんどが $|e^z - 1| \ge |e^z| - 1$ の逆向きの不等式が成り立つと主張するものだったが，当然誤りである．べき級数を利用するのが標準的であろう．その場合，三角不等式の一般化で項が無限個の場合を利用する．（証明は単に有限項の場合の極限を取ればよい．）

$$\begin{aligned} |e^z - 1| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \\ &= e^{|z|} - 1 \end{aligned}$$

後半は $e^x - 1 - xe^x$ の単調性からも示せるが，ここではやはりべき級数を用いて示してみる．自然数 $n \ge 1$ に対して，$n! \ge (n-1)!$ であるから，

$$\begin{aligned} e^{|z|} - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n-1)!} \\ &= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ &= |z|e^{|z|} \end{aligned}$$

となる．

[2] （指数函数の逆函数として定義される）対数函数 $\log z$ の導函数は $1/z$ であることを示せ．（これが $z \ne 0$ で正則であることは仮定してよい．）

（解答）直接，対数の定義に当てはめて解答しようとする答案が多かったが，例えば差分商を計算するのに

$$\frac{\log(z_0 + z) - \log z_0}{z} = \frac{1}{z} \log\left(1 + \frac{z}{z_0}\right) = \frac{1}{z_0} \log\left(1 + \frac{z}{z_0}\right)^{z_0/z}$$

とやって，あとは自然対数の底 e の定義に戻って $z \to 0$ の時の極限値を計算するという方針が大多数であった．しかし，z などは複素数なので，$\lim_{h \to 0}(1+h)^{1/h} = e$ が, 複素数 h についても成り立つことを言っておく必要がある．この点に留意する答案は残念ながら見られなかった．本問では，対数函数が指数函数の逆函数であったこととヒントを用いるのが早道であろう．ただ，対数函数は多価性があるので，函数は局所的にしか定義されていないかもしれないことに注意する必要がある．$f(z) = \log z$ とし，これは $z = z_0$ の近傍で一価正則に定まっているとする．（このような $f(z)$ は z_0 における対数函数の正則な**分枝**などと呼ばれる．）すると，$e^{f(z)} = z$ であるから，この両辺を微分して $z = z_0$ を代入すると，$(e^w)' = e^w$ に注意して，

$$e^{f(z_0)} f'(z_0) = 1$$

を得る．$e^{f(z_0)} = z_0$ であるから，このことから $f'(z_0) = 1/z_0$ が得られる．

[3] $1/(1-z^2)$ の原点におけるべき級数展開を求め，それを用いて次の公式

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots, \quad |z| < 1$$

を導け．ただし，ここに Log は対数の主値を表すとする．

（解答）べき級数展開 $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ において，$x = z^2$ とすれば，展開

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots$$

を得る．ここで両辺を形式的に 0 から z まで積分すれば

$$(*) \qquad \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

を得る．この「形式的に」という部分を正当化するためには何らかの議論が必要である．正則関数の「定積分」はまだ講義では説明されていないので，ここではその方法は避けることにする．一つの方法は，(*) の両辺が単位円板上で正則であることにまず注意して，上のことから両辺の導函数が一致することが分かる．従って両辺の差は高々定数であるが，原点ではともに値 0 を取ることから，単位円板上で一致することが言える．もう一つの方法は，正の実数 $z \in (0,1)$ に対しては，通常の積分を施して (*) を示し（この場合は，左辺の無限級数が区間 $[0,z]$ において一様収束していることに注意する），最後に一致の定理を用いるものである．

[4] 単位円板上で次の条件を満たすような正則函数 $f(z)$ は存在するか？

$$f(1/n) = 1/n^2 \quad (n = 2, 3, \cdots) \quad \text{かつ} \quad f(-1/n) = -1/n^3 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

（解答）本問では仮定で「正則函数」と書いたが，実際には「解析函数」と書くべきであった．（というのも，講義ではまだ正則函数と解析関数が同じ概念を表すことを示していなかったからである．）以下，$f(z)$ が単位円板上の解析函数であると仮定して，そのようなものが存在しないことを示す．もし，そのような $f(z)$ が存在するとすると，第一の条件から $f(z)$ が解析函数 z^2 と $z = 1/n$ という点では一致することになるが，一致の定理から $f(z)$ が z^2 に単位円板上で恒等的に等しくなることが従う．すると，$f(-1/n) = (1/n)^2$ であるはずだから，第二の条件は満たされず矛盾が生じた．よって，このような函数 $f(z)$ は存在しない．

[5] 微分形式の滑らかな曲線に沿う積分の値は，その曲線のパラメータの取り方によらずに定まることを，実際に次の状況下で示せ．$f(z)$ は領域 Ω 上の複素数値連続函数とし，γ は Ω 内の滑らかな曲線とする．γ のパラメータ表示が $z_1(t)$ $(t_0 \le t \le t_1)$ が与えられており，滑らかな狭義単調増加函数 $\varphi(s)$ $(s_0 \le s \le s_1)$ で $\varphi(s_0) = t_0, \varphi(s_1) = t_1$ を満たすものによって γ の別のパラメータ表示 $z_2(s) = z_1(\varphi(s))$ が与えられているとする．このとき，

$$\int_{t_0}^{t_1} f(z_1(t))z_1'(t)dt = \int_{s_0}^{s_1} f(z_2(s))z_2'(s)ds$$

であることを確認せよ．（よって線積分 $\int_\gamma f(z)dz$ は well-defined である．）

（解答）仮定から $z_2'(s) = z_1'(\varphi(s))\varphi'(s)$ であるので，$t = \varphi(s)$ と置換すれば置換積分に関する公式から

$$\int_{s_0}^{s_1} f(z_2(s))z_2'(s)ds = \int_{s_0}^{s_1} f(z_1(\varphi(s)))z_1'(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} f(z_1(t))z_1'(t)dt$$

が得られる．

[6] 微分形式 $\omega = xdy + y^2dx$ を曲線 $\gamma : z(t) = t + ie^t$ $(0 \le t \le 1)$ について積分せよ．

（解答）なぜか ω を複素形 $\omega = Pdz + Qd\bar{z}$ の形に直して計算しようとする答案が多かったが，今の場合はそのままの「実形」の方が計算には便利である．$z(t) = x(t) + iy(t)$ と書けば，$x(t) = t, y(t) = e^t$ であるので，

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \bigl(x(t)dy(t) + y(t)^2 dx(t)\bigr) = \int_0^1 (te^t + e^{2t})dt = \frac{e^2+1}{2}$$

となる.（なお，この ω は閉形式ではないので，勝手に曲線の形を変えたりすると値が変化するので注意が必要である.）

[7] $f(z)$ は点 $a \in \mathbb{C}$ の近傍において連続な複素函数とし，γ_δ は反時計回りに向きづけられた円周 $|z-a| = \delta$ を表すとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a)$$

（解答）$f(z)$ が正則であるとして，コーシーの積分公式を使うという誤答が目立った．もしそうなら，そもそも極限を取らなくても等式が成り立っているはずであるが，本問は $f(z)$ が連続というだけで，極限を取ればコーシーの積分公式の類似が成り立つというのがポイントである．

$f(z) = f(a) + \eta(z)$ と書けば，連続性から，任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対してある正数 $\delta_0 > 0$ が存在して，$|z-a| \le \delta_0$ ならば $|\eta(z)| \le \varepsilon$ が成り立つ．そこで，$0 < \delta \le \delta_0$ に取り，

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(a)dz}{z-a} + \int_{\gamma_\delta} \frac{\eta(z)dz}{z-a} = I_1 + I_2$$

と表す．$f(a)$ を定数函数（従って正則函数）と見れば，コーシーの積分公式（または直接計算）から

$$I_1 = 2\pi i f(a)$$

である．一方，絶対積分評価により

$$|I_2| \le \int_{\gamma_\delta} \frac{|\eta(z)|}{|z-a|}|dz| \le \frac{\varepsilon}{\delta}\int_{\gamma_\delta} |dz| = \frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon$$

が分かる．従って，$0 < \delta \le \delta_0$ ならば，

$$\left| \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)dz}{z-a} - 2\pi i f(a) \right| \le 2\pi\varepsilon$$

であることが言え，主張が示されたことになる．

[8] a を正の実数として，

$$I_1 = \int_0^a e^t \cos t dt, \quad I_2 = \int_0^a e^t \sin t dt$$

と定める．原点から点 $a + ia$ に至る曲線 γ_1 を $\gamma_1 : z(t) = t + it \ (0 \le t \le a)$ で，また原点, 点 a，点 $a + ia$ を順に結ぶ折れ線を γ_2 とする．このとき，

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_{\gamma_2} e^z dz$$

であることを説明し，それぞれの線積分を求めることにより I_1, I_2 を計算せよ．

（解答）本問は，積分値 $\int_{\gamma_1} e^z dz$ と $\int_{\gamma_2} e^z dz$ が一致することを示す前半部と，I_1, I_2 を具体的に計算するという後半部に分かれる．後半だけなら，高校数学の範囲でも解けるが，前半をうまく利用することによって後半の計算に役立てるというのが本問の作成主旨であったにもかかわらず，その通りに解答してくれた人は残念ながら非常に少数であった．

前半に関しては「線積分は曲線の取り方によらず端点のみで決まるから」とする答案が目立ったが，これは一般には誤りである．例えば問 [5] で確認したように，一つの曲線が与えられた時，線積分はその**パラメータ表示**にはよらないが，曲線の形には依存するのである．両端点を共有する二つの曲線がある領域において（端点を固定するホモトピーで）ホモトピックならば，その領域上で定義された**閉**

形式に対しては曲線の取り方にはよらない，というのが Green-Stokes の定理の教えるところである．正則函数 $f(z)$ について，$f(z)dz$ が閉形式になっているという事実がコーシーの積分定理の証明の本質的な部分であったことを思い出して欲しい．従って，解答としてはたとえば次のように書けばよい．

曲線 γ_1 と γ_2 で囲まれた三角形を Ω とすると，

$$\int_{\gamma_2} e^z dz - \int_{\gamma_1} e^z dz = \int_{\partial\Omega} e^z dz$$

であり，右辺はコーシーの積分定理から 0 であるから，前半が示される．この左辺のそれぞれの積分値を計算してみると，まず γ_1 は $z = t+it$ $(0 \leq t \leq a)$ とパラメータ表示されるので，γ_1 上 $dz = (1+i)dt$ より

$$\int_{\gamma_1} e^z dz = \int_0^a e^{t+it}(1+i)dt = (1+i)\int_0^a e^t(\cos t + i\sin t)dt = (1+i)(I_1 + iI_2)$$

となる．一方，γ_2 は，曲線 $z = t$ $(0 \leq t \leq a)$ と曲線 $z = a + it$ $(0 \leq t \leq a)$ の形式和とみなせるので，

$$\int_{\gamma_2} e^z dz = \int_0^a e^t dt + i\int_0^a e^{a+it}dt = e^a - 1 + ie^a\int_0^a (\cos t + i\sin t)dt = ie^a(\sin a - i\cos a) - 1$$

と計算される．従って，

$$I_1 + iI_2 = \frac{1}{1+i}\left(ie^a(\sin a - i\cos a) - 1\right)$$

において実部・虚部をそれぞれ比較すれば

$$I_1 = \frac{1}{2}(\cos a + \sin a - 1), \quad I_2 = \frac{1}{2}(-\cos a + \sin a + 1)$$

が得られる．（なお，本問では γ_2 に沿った積分を考察しなくても，直接 $\int_{\gamma_1} e^z dz = (1+i)\int_0^a e^{t+it}dt = [e^{t+it}]_0^a = e^{a+ia} - 1$ のように計算して I_1, I_2 を求めることも可能であり，実際その方が計算が単純である．このやり方に沿う答案もいくつかあった．）

[9] 実数 $0 < a < 1$ に対して次の等式を示せ．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + a^2}dz = \frac{\sin a}{a}$$

（解答）部分分数分解 $1/(z^2 + a^2) = [1/(z - ai) - 1/(z + ai)]/(2ai)$ およびコーシーの積分公式を用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + a^2}dz &= \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z - ai}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z + ai}dz\right] \\ &= \frac{1}{2ai}\left[e^{ai} - e^{-ai}\right] = \frac{\sin a}{a}\end{aligned}$$

と計算できる．ここで $ai, -ai$ がともに単位円の内部に含まれることを用いていることに注意する．