平成 15 年度 解析学 B　（須川敏幸 担当）

2003 年 6 月 13 日実施　中間試験問題　解答例と講評

[1] 0 でない任意の複素数 a に対して、$z^2 = a$ となる複素数 z がちょうど 2 個存在することを示せ。（Hint: 極表示を用いる。）

（解）偏角が 2π の整数倍の自由度を持つことに留意しない答案が目立った。例えば以下のように処理すればよい。また、極表示で $r \geq 0$ を暗に仮定しているのに、$r = \pm\sqrt{s}$ などとする答案も多かった。注意されたい。$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), a = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ と極表示する。すると de Moivre の公式から $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ より、関係式 $r^2 = s, 2\theta = \varphi + 2n\pi$ を得る。ただし n は整数とする。これを解いて $r = \sqrt{s}, \theta = \frac{\varphi}{2} + n\pi$ を得るが、偏角の差が 2π の整数倍であるものは同じ点を表すので、このような z は $\sqrt{s}(\cos(\varphi/2) + i\sin(\varphi/2))$ および $\sqrt{s}(\cos(\varphi/2+\pi) + i\sin(\varphi/2+\pi)) = -\sqrt{s}(\cos(\varphi/2) + i\sin(\varphi/2))$ のちょうど二つである。

[2] 複素数 $z, w \in \mathbb{C}$ に対して，いわゆる中線定理 $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ を証明せよ.

（解）$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2$ および $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2$ より容易に得られる。本問の正答率は高かったが、成分表示 $z = x+iy$ などを用いる方法はややスマートではない（函数論的ではない）であろう。

[3] 形式的複素偏微分（ヴィルティンガーの微分作用素）$\partial, \bar{\partial}$ について次のことが成り立つことを示せ。（以下、形式的な話なので、本問では関数の滑らかさや定義域などは気にしないこととする。）

(a)　$\overline{\partial f} = \bar{\partial}\bar{f}, \quad \overline{\bar{\partial} f} = \partial\bar{f}$

(b)　$\partial(f\circ g) = (\partial f)\circ g\cdot\partial g + (\bar{\partial} f)\circ g\cdot\partial\bar{g}, \quad \bar{\partial}(f\circ g) = (\partial f)\circ g\cdot\bar{\partial} g + (\bar{\partial} f)\circ g\cdot\bar{\partial}\bar{g},$

ただし $\bar{f}$ は f に対して $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$ で定まる関数とする。（性質 (b) は、連鎖律に対応するものである。）

（解）関係式 (a) は定義を当てはめるだけである。

$$2\overline{\partial f} = \overline{f_x - if_y} = \bar{f}_x + i\bar{f}_y = 2\bar{\partial}\bar{f}$$

により第一の等式を得る。f の代わりに $\bar{f}$ を適用すれば第二の等式を得る。次の連鎖律に対応する等式 (b) は驚いたことに正解者がいなかった。写像の合成を単なるかけ算として Leibnitz の公式を適用する者も何人かいた。通常の連鎖律から導くのであれば、$g = u + iv$ として

$$\begin{aligned} 2\partial(f\circ g) &= (f\circ g)_x - i(f\circ g)_y \\ &= \big[(f_x\circ g)u_x + (f_y\circ g)v_x\big] - i\big[(f_x\circ g)u_y + (f_y\circ g)v_y\big] \end{aligned}$$

を導き、これに $u_x = (g_x + \bar{g}_x)/2$ などを代入して整理すればよいが、かなり複雑である。それよりは、全微分の形に代入する方が自然であろう。z_0 を固定し、$w_0 = g(z_0)$ とおく。$A = \partial f(w_0), B = \bar{\partial} f(w_0), \alpha = \partial g(z_0), \beta = \bar{\partial} g(z_0)$ とすれば、これらの偏導関数の特徴付けから、

$$f(w_0 + w) = f(w_0) + Aw + B\bar{w} + o(|w|), g(z_0 + z) = g(z_0) + \alpha z + \beta\bar{z} + o(|z|)$$

がそれぞれ $w \to 0, z \to 0$ の時に成り立つ。そこで最初の式に $w = g(z_0 + z)$ として次の式を代入し

$$\begin{aligned} (f\circ g)(z_0 + z) &= f(w_0) + A(\alpha z + \beta\bar{z}) + B\overline{(\alpha z + \beta\bar{z})} + o(|z|) \\ &= (f\circ g)(w_0) + (A\alpha + B\bar{\beta})z + (A\beta + B\bar{\alpha})\bar{z} + o(|z|) \end{aligned}$$

を得る。再び偏導関数の特徴付けから、$\partial(f\circ g)(z_0) = A\alpha + B\bar{\beta}, \bar{\partial}(f\circ g)(z_0) = A\beta + B\bar{\alpha}$ を得るが、(a) で得られた関係式 $\bar{\beta} = \partial\bar{g}(z_0)$ などに注意すれば、これが所期の式に他ならないことが分かる。

[4] 複素平面上の複素函数 $f(z) = z^2\bar{z}$ は各点において正則ではないことを示せ.

（解）まず $\bar{\partial}f(z) = z^2$ であることに注意する。（計算は、$z, \bar{z}$ が独立変数であると思って、$\bar{z}$ に関する“ 偏微分 ”を取るだけでよい。）従って、f は原点以外では $\bar{\partial}f \neq 0$ を満たしている。つまり、原点以外では f は複素微分可能ではない。点 z_0 での正則性は、その点のある近傍全体で複素微分可能であることと定義されたことを思い出すと、原点も含めて各点で正則でないことがこのことから分かる。

なお、“ 正則性 ”と“ 複素微分可能性 ”とを混同する答案が散見された。講義では複素微分可能であることを C.D.(complex differentiable) と略記したが、これは一般的な用語では決してないので、他の講義や試験などでは使用しないように注意されたい。

[5] $u(x,y), v(x,y)$ を次の式によって右半平面 $H = \{z = x+iy : x > 0\}$ 上で定義された函数とする。

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right), \quad v(x,y) = \arctan\frac{y}{x}.$$

ただしここで逆正接函数 $\arctan t$ は主枝 $-\pi/2 < \arctan t < \pi/2$ に取る。このとき、u, v はコーシー・リーマン方程式を満たす、すなわち $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が H 上の正則函数であることを証明せよ。

（解）これは単に偏導関数を計算して、$u_x = -v_y, u_y = v_x$ を確認するだけである。なお、ここで得られる函数 $f(z)$ は対数函数（の主値）$\log z$ に他ならないことに注意しておく。

[6] べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^{n^2}$ の収束半径 R を求めよ.

（解）これも正答率が非常に低かった。まず、収束半径が 1 であるとの目星をつけると、以下のように解答ができる。$|z| > 1$ の時は、$n^n|z|^{n^2} \to \infty$ であることは明白である。一方、$|z| < 1$ の時は

$$\log(n^n|z|^{n^2}) = n\log n + n^2\log|z| = n^2\left(\log|z| + \frac{\log n}{n}\right)$$

となり、$(\log n)/n \to 0$ であることと $\log|z| < 0$ であることに注意すると $\log(n^n|z|^{n^2}) \to -\infty$ であること、すなわち $n^n|z|^{n^2} \to 0$ であることが結論できる。よって、$R = 1$ である。

なお、コーシー・アダマールの公式を使えば

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\left(n^n\right)^{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

より正答を得る。（上の指数を $1/n$ としてしまう誤答が多く見られた。）

[7] 複素数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ に対して，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は条件収束するが，絶対収束はしないと仮定する．このとき，べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は 1 であることを証明せよ．

（解）この問題も正答者はいなかった。収束半径を R とする。もし $R > 1$ だとすると級数 $\sum a_n z^n$ は $z = 1$ で絶対収束するはずだが、それは仮定に反する。よって $R \leq 1$ である。一方、級数 $\sum a_n$ は条件収束するので、特に $a_n \to 0$ である。従って、$|z| < 1$ であれば $a_n z^n \to 0$ となる。これより $R \geq 1$ が分かり、最終的に $R = 1$ が得られる。

[8] 実数 x, y に対して次の等式を示せ：$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

（解）本質的には Euler の公式を使うことに帰着されるが、実際には加法定理と、定義から従う関係式 $\sinh x = -i\sin(ix), \cosh x = \cos(ix)$ に注意すれば次のように簡単に計算ができる。

$$\sin(x+iy) = \sin x\cos(iy) + \cos x\sin(iy) = \sin x\cosh y - i\cos x\sinh y$$

はちょうど実部・虚部の分解になっているので、絶対値の定義から

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y$$

を得る。最後に $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ を代入して整理すれば所期の式を得る。