解析学 II　参考資料：リーマン積分　（2005年10月27日，担当：須川）

定理の系：$f(x)$ を閉区間 $I=[a,b]$ 上で区分的連続な関数とする．このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在して次のことが成り立つ：I の分割 Δ が $|\Delta|<\delta$ を満たすならば，

$$S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$$

が成り立つ．

（注）定理は f が区間 I 上で連続である場合に上の主張が成り立つことを言っていた．なお，この系はこの条件の下で f の上積分と下積分とが一致すること，すなわち f がリーマン積分可能であることを意味している．

［証明］「区分的連続」の定義から，I を適当な小閉区間 $I_1=[a_0,a_1],I_2=[a_1,a_2],\dots,I_k=[a_{k-1},a_k]$ に分割すれば，f の各 (a_{j-1},a_j) への制限は一様連続なので，I_j 上の（一様）連続関数 f_j に拡張される．また，f は I 上で有界でもあるので，ある実数 $K>0$ が存在して $|f(x)|\le K$ が任意の $x\in I$ について成り立つ．

定理より，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して I_j の分割 Δ_j が $|\Delta_j|<\delta$ を満たせば，$S_{\Delta_j}(f_j)-s_{\Delta_j}(f_j)<\varepsilon/(2k)$ が成り立つ．ここで δ を十分小さく取って，$8K(k-1)\delta<\varepsilon$ としてよい．

そこで，$\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ を I の任意の分割で $|\Delta|<\delta$ を満たすものとする．Δ が分割する I の n 個の小区間 J_i とする．J_i における f の上限，下限を M_i,m_i, とし，J_i の長さを $|J_i|$ と書くことにすれば，$S_\Delta(f),s_\Delta(f)$ はそれぞれ

$$S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^n M_i|J_i|,\quad s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^n m_i|J_i|$$

と定義されたことを思い出そう．ここで $|J_i|<\delta,-K\le m_i\le M_i\le K$ である．Δ の分点を付け加えることによって得られる I_j の分割 Δ_j とすると，$\sum_{j=1}^n S_{\Delta_j}(f_j)$ と $S_\Delta(f)$ との違いは，$a_1,\dots,a_{k-1}$ のどれかを含む小区間 I_i でしか生じない．また，I_i において生じる値の差はせいぜい $2K\delta$ であるから，それらを合わせてもせいぜい $2K(k-1)\delta$ である．ゆえに

$$\left|S_\Delta(f)-\sum_{j=1}^n S_{\Delta_j}(f_j)\right|<2K(k-1)\delta<\frac{\varepsilon}{4}$$

となる．小文字の s についても同様の式が得られる．よって，

$$\begin{aligned}
&S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\\
&\le\left(S_\Delta(f)-\sum_{j=1}^n S_{\Delta_j}(f_j)\right)+\sum_{j=1}^k\left(S_{\Delta_j}(f_j)-s_{\Delta_j}(f_j)\right)+\left(\sum_{j=1}^n s_{\Delta_j}(f_j)-s_\Delta(f)\right)\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+k\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon
\end{aligned}$$

となり，求める不等式が得られた．

なお，上の結果は実はより一般的な主張の一部と考える方がより理解しやすいかもしれない．区間 I の部分集合 E の (Jordan の意味で) 長さが 0 であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，有限個の区間 $I_1,\dots,I_n$ が存在し，$E\subset I_1\cup\cdots\cup I_n$ かつ $|I_1|+\cdots+|I_n|<\varepsilon$ が成り立つことをいう．たとえば，明らかに有限集合は長さ 0 である．このとき，より一般に次の定理が成り立つ．

定理. 区間 I 上の有界関数 $f(x)$ が，長さ 0 のある集合 E を除く各点 x において連続であるならば，$f(x)$ は I 上でリーマン積分可能である．

［レポート課題］

この定理を証明せよ.（教科書７章を参照のこと）