解析学Ｉ　参考資料：実数の構成　（2005 年 5 月 12 日）

$(X, \leq)$ を順序集合とする．$x \leq y$ かつ $x \neq y$ であるとき，通常のように $x < y$ と表す．また，$x \leq y$ を $y \geq x$ と書いても同じ意味である．

(A, B) が X の切断であるとは，次の条件を満たすことをいう．

1. A, B は X の自明でない分割である，すなわち，A, B は X の空でない部分集合で，$X = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ が成り立つ．
2. 任意の $a \in A$ および任意の $b \in B$ に対して，$a \leq b$ が成り立つ．

このとき，一般には次の４つの可能性がある．

(i) $\max A, \min B$ がともに存在しない．
(ii) $\max A$ は存在するが，$\min B$ は存在しない．
(iii) $\max A$ は存在しないが，$\min B$ が存在する．
(iv) $\max A, \min B$ がともに存在する．

さて，有理数全体の集合（有理数体）$\mathbb{Q}$ が自然に順序体になることまでは知っているとしよう．有理数の切断に関しては，(iv) は決して起こらない．（たとえば，$\max A, \min B$ がともに存在したとすれば，その平均は A, B いずれにも属さない有理数となってしまい，矛盾である．）また，(ii), (iii) については，$\max A$ を B に付け替える（あるいはその逆の操作をする）ことにより，対等な状況とも思える．

そこで，$\mathbb{Q}$ の切断で (i) または (ii) をみたすもの全体を考えて，それを X と書くことにする．この X に以下のように順序と体の構造を入れて実数の公理（すなわち，順序に関して完備な順序体であること）を満たすようにできる．（したがって，$X = \mathbb{R}$ とみなすことができる．）これがデデキント (Dedekind) の考えた実数の構成法である．

以下では，X の元を $x = (A, B)$ と表す．（また，A, B はともに x が与えられれば決まるものであるから，必要に応じて $A = A_x, B = B_x$ などと書いてもよい．）任意の有理数 r に対して，$A = \{s \in \mathbb{Q} : s \leq r\}, B = \mathbb{Q} - A$ とすれば $(A, B) \in X$ であるが，これを r^* と表すことにすると，対応 $r \mapsto r^*$ により，$\mathbb{Q}$ は（順序を保ったまま）X に自然に埋め込まれる．

定義. $(A, B) \leq (A', B')$ を $A \subset A'$ によって定める．（すなわち，$x \leq x'$ を $A_x \subset A_{x'}$ によって定義している，と思ってもよい．）

問. このとき，X はこの関係 $\leq$ によって全順序集合となることを示せ．（つまり，$\leq$ は全順序の公理を満たす．）

問. X の任意の２元 x, y $(x < y)$ に対してある有理数 r が存在して $x < r^* < y$ となることを証明せよ．

重要なことは，この X が順序に関して完備になることである．これは次のようにして示される．

命題 1. X の切断では常に (ii) または (iii) が起こる．

（証明の概略）(A^*, B^*) を X の切断とする．そこで，$A = \{r \in \mathbb{Q} : r^* \in A^*\}, B = \{r \in \mathbb{Q} : r^* \in B^*\}$ と定義すると，(A, B) は $\mathbb{Q}$ の切断を与える．これを X の元とみて $x = (A, B)$ と書くことにすると，(A^*, B^*) が X の切断であったことから，$x \in A^*$ または $x \in B^*$ が成り立つ．このとき，それぞれの場合に応じて $x = \max A^*$ または $x = \min B^*$ であることが言え，証明が終わる．

問. $x \in A^*$ であったとして，$x = \max A^*$ であることを証明せよ．

命題 2. X は順序に関して完備である．すなわち，X の，上に有界な（空でない）部分集合は常に上限を持つ．

（証明の概略）E を X の，上に有界な空でない部分集合とする．U_E を E の上界全体とすると，仮定からこれは空ではない．さらに，$(X - U_E, U_E)$ は X の切断を与える．命題 1 によって $\max(X - U_E)$ または $\min U_E$ が存在するが，実際には $\max(X - U_E)$ が存在することはない．よって $\sup E = \min U_E$ が存在することが分かる．

問. 上記において，$\max(X - U_E)$ が存在しないことを示せ．

さて，以上みたように，X には完備な全順序構造が入ることは分かったが，代数的な構造についてはまだ定義していなかった．これについては，以下のように定義を与えることができる．

定義. X の元 $x_1 = (A_1, B_1), x_2 = (A_2, B_2)$ に対して，その和 $x_1 + x_2 = (A, B)$ を次のように定める：

$$\begin{aligned} &A = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} (:= \{a \in \mathbb{Q} : \exists a_1 \in A_1, \exists a_2 \in A_2;\ a = a_1 + a_2\}), \\ &B = \{b_1 + b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}. \end{aligned}$$

問. 実際に，上で定義した (A, B) が (i) または (ii) を満たす $\mathbb{Q}$ の切断になることを示せ．また，この和に関して X は体の公理系の条件 (i)-(iv) を満たすことを示せ.（零元は有理数の 0 に対応する 0^* となっている．また，和に関する逆元 $-x$ を定義する際，切断についての条件 (i), (ii) を満たすようにしなければならないので，若干の注意を要する.）

積についてはやや複雑であるが，次のようにすることができる．

定義. X の元 $x_1 = (A_1, B_1), x_2 = (A_2, B_2)$ に対して，まず $0^* \leq x_1, 0^* \leq x_2$ である場合には積 $x_1 \cdot x_2 = (A', B')$ を

$$B' = \{b_1 b_2 : b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\},\ A' = \mathbb{Q} - B'$$

によって定め，その他の場合は

$$x_1 x_2 = \begin{cases} -\{(-x_1) \cdot x_2\} & (x_1 < 0^*, x_2 \geq 0^*) \\ -\{x_1 \cdot (-x_2)\} & (x_1 \geq 0^*, x_2 < 0^*) \\ (-x_1) \cdot (-x_2) & (x_1 < 0^*, x_2 < 0^*) \end{cases}$$

によって定める．

問. この定義によって，実際に X が体の公理を満足し，しかも順序体にもなっていることを確認せよ.（乗法の単位元は有理数の 1 に対応する 1^* であることに注意.）

以上は実数体を構成する一つの方法にすぎない．コーシー列を利用するカントールの方法もあり，そちらの方が汎用性がある．よって，上記の方法にこだわる必要はない．このような構成法は実数を使う際には全く意識する必要はないので，細部が理解できなくても困ることはない．要は実数を特徴付けるいくつかの性質（順序に関する完備性，アルキメデス性など）が使いこなせれば十分である．

上記の問はかなり力のある人向けであるが，期限を定めないのでレポートとして提出してくれてもよい.（須川敏幸）