平成14年度 総合数理特論D　（担当：須川）

2003年1月29日出題（2月7日改訂）

レポート問題

以下のうち，１問を選んで解答して下さい．

[1] Ωをリーマン面Rの正則領域（つまり、Rの相対コンパクトな部分領域で、境界が有限個の互いに交わらない解析的Jordan閉曲線からなるもの）とする。$p_0 \in \Omega$として、Ω内の座標円板$\alpha : D \to \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$（ただし$\alpha(p_0) = 0$とする）における調和特異性$s(p) = -\log|\alpha(p)|$を持ち、$\Omega$の境界で$0$となるような、$\Omega \setminus \{p_0\}$における調和関数$G(p, p_0)$が存在することを説明せよ。（通常、$G(p, p_0)$は$p_0$に極を持つ$\Omega$のGreen函数と呼ばれる。）

特にΩが単連結である場合には、$\Omega \setminus \{p_0\}$上の正則1形式$\omega = dG(\cdot, p_0) + i*dG(\cdot, p_0)$に対して、一点$p_1 \in \Omega \setminus \{p_0\}$を固定し、

$$f(p) = \exp\left(-\int_{p_1}^{p} \omega + G(p_1, p_0)\right)$$

と定める。ただし、ここで積分路はp_1からpに至る$\Omega \setminus \{p_0\}$内の滑らかな曲線に取る。すると、fは積分路の取り方によらずに定まる正則函数で、$|f| < 1$を満たすことを示せ。Riemannの除去可能定理によりfはp_0にも正則に拡張できるが、このとき$f : \Omega \to \mathbb{D}$が双正則になっていることも証明せよ。

[2] Γを上半平面$\mathbb{H}$に作用するFuchs群とする。すなわち、Γは$\mathbb{H}$の解析的自己同型群$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$の離散部分群とする。言い換えれば、$\Gamma$の元の列$\gamma_n$が$\gamma_n \to \mathrm{id}$（ただし位相は行列のノルムで考える）を満たせばあるn_0から先のnでは$\gamma_n = \mathrm{id}$が成り立つということである。このとき、Γは$\mathbb{H}$に真性不連続(properly discontinuous)に作用する、あるいは、より強く、任意のコンパクト集合$K \subset \mathbb{H}$に対して$\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$は有限巡回群であることを証明せよ。（ヒント：$\Gamma$は$\mathbb{H}$のPoincaré距離$d(z, w) = \mathrm{arctanh}|(z - w)/(z - \bar{w})|$を不変にすることに注意する。）

次に$\mathbb{H}$内の2点z, wがΓ同値であるということを、ある$\gamma \in \Gamma$が存在して$w = \gamma(z)$が成り立つことこととして定義する。この同値類で割って得られる商空間$R = \mathbb{H}/\Gamma$には、商写像$\pi : \mathbb{H} \to R$が正則となるようなリーマン面の構造が入ることを説明せよ。

[3] リーマン面に関する適当な問題を作って、解答せよ。あるいは、自分で面白いと思ったリーマン面に関する定理を紹介し、証明を与えよ。