# 平成 17 年度 解析学 I　（担当：須川）

期末試験・解答例

[1] 開区間 $I$ 上で定義された関数 $f$ が，$x_0 \in I$ において連続であることの定義を ε - δ 論法を用いて述べよ．また，その定義に従って，関数 $f(x) = x^2$ が実際に各実数 $x_0$ において連続であることを示せ．

［解答］連続性の定義：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I;\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

次に実際に $f(x) = x^2$ が各点で連続であることを見る．

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| \le (|x - x_0| + 2|x_0|)|x - x_0|$$

であるから，$|x - x_0| < \delta$ ならば，$|f(x) - f(x_0)| < (\delta + 2|x_0|)\delta$ である．したがって，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \min\{\varepsilon/(1 + 2|x_0|),\ 1\}$ に選べば，

$$(\delta + 2|x_0|)\delta \le (1 + 2|x_0|)\delta \le \varepsilon$$

となるので，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ が得られる．

[2] $\mathbb{Z}$ を整数全体のなす集合とする．このとき，集合 $A = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ の上への有界性および下への有界性を調べよ．また，上に有界（下に有界）である場合は，最大数（最小数）の存在について調べ，また上限（下限）を求めよ.（単に数値を与えるだけではなく，その根拠を数学的に記述せよ.）

［解答］$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ だから，$A$ は上に有界ではなく，とくに最大数を持たない.（ここは，実数論の基礎的事実だけから示すには，アルキメデスの原理かそれと同等の性質が必要となる．しかし，問題に条件が付されていない限り既習の事実は使用してもよい.）一方，$2^n > 0$ であるから $0$ は $A$ の下界である．実際，$2^n \to 0$ $(n \to -\infty)$ であるから，これは最大下界，すなわち下限になっている．$0$ 自身は $A$ の元ではないので，最小数は存在しない．

[3] 関数 $f(x), g(x)$ は $x = x_0$ において微分可能であるとすると，積 $h(x) = f(x)g(x)$ も $x = x_0$ において微分可能であり，その微分係数は $h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ で与えられることを示せ．

［解答］微分可能性の仮定から，$x = x_0$ において連続な関数 $\alpha(x), \beta(x)$ が存在して，

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\alpha(x),\ g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\beta(x)$$

かつ，$\alpha(x_0) = f'(x_0), \beta(x_0) = g'(x_0)$ である．そこで，積を計算して

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (x - x_0)[\alpha(x)g(x_0) + f(x_0)\beta(x) + (x - x_0)\alpha(x)\beta(x)]$$

となる．ここで，$[\,]$ 内を $\gamma(x)$ とおけば，これは $x = x_0$ で連続であり $\gamma(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ となるので，主張が示された．

[4] 正接関数 $\tan x$ は区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ を実数全体 $\mathbb{R}$ に単調増加かつ全単射に写像することを示し，その逆写像 $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ の導関数を求めよ．

［解答］$\tan x$ は区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内で微分可能で，導関数は $1/\cos^2 x > 0$ であるから，単調増加で，特に単射である．また，$\tan x \to \pm\infty$ $(x \to \pm(\pi/2 - 0))$ であり，中間値の定理から区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ を $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ に全射に写す．よって全単射である．逆写像 $x = \arctan y$ の導関数は，公式から

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan x^2} = \frac{1}{1 + y^2}$$

と求められる．

[5] 平均値の定理を用いて次の不等式を証明せよ：

$$p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1) \quad (x > 1, p > 1).$$

（ただし，実定数 $p > 0$ に対して関数 $x^p = e^{p\log x}$ が $x > 0$ において微分可能であることは証明なしに用いてよい．）

［解答］$f(x) = x^p$ とすると，$f'(x) = px^{p-1}$ である．さて，平均値の定理から，ある $\xi \in (1, x)$ が存在して，

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi)$$

となる．$f'(x)$ は単調増加であるから，$p = f'(1) < f'(\xi) < f'(x) = px^{p-1}$ が成り立つ．従って，

$$p < \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < px^{p-1}$$

となり，分母を払って所期の不等式を得る．なお，平均値の定理を用いるという条件付の問題なので，それ以外の方法で解いた解答には加点されていない．

[6] $a$ を正の実数とするとき，次の極限を計算せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n}$$

［解答］これは中間試験の問題の分母・分子を入れ替えたものなので省略する．

[7] $f$ を区間 $I$ 上の凸関数（すなわち，下に凸な関数）とする．このとき，任意の自然数 $n$, $I$ 上の任意の点 $x_1, \ldots, x_n$ および単位区間 $[0,1]$ 上の任意の点 $t_1, \ldots, t_n$ で $t_1 + \cdots + t_n = 1$ を満たすものに対して，

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n)$$

が成り立つことを示せ．

［解答］帰納法による．$n = 2$ の場合は定義そのものである．$n - 1$ の時成り立つと仮定し，$n$ の場合を示そう．$t_n = 1$ なら明らかだから，$t_n < 1$ としてよい．そこで，$s_j = t_j/(1 - t_n)$ として $x = (t_1x_1 + \cdots + t_{n-1}x_{n-1})/(1 - t_n) = s_1x_1 + \ldots s_{n-1}x_{n-1}$ とおけば，$s_1 + \cdots + s_{n-1} = 1$ より $x \in I$ となることが分かり，したがって凸性から

$$f((1 - t_n)x + t_nx_n) \leq (1 - t_n)f(x) + t_nf(x_n) \tag{1}$$

である．ここで帰納法の仮定から，

$$f(x) = f(s_1x_1 + \ldots s_{n-1}x_{n-1}) \leq s_1f(x_1) + \cdots + s_{n-1}f(x_{n-1})$$

となるので，これを不等式 (1) に代入し，欲しかった不等式を得る．よって $n$ の場合が示された．