平成 17 年度 解析学 I　（担当：須川）

2005 年 6 月 16 日 10:50～12:20

中間試験：講評および解答例

[1] 集合 $A = \{1/(n^2+1) : n \in \mathbb{Z}\}$ は最大数，最小数を持つか？また，この集合の上限，下限を求めよ．

［講評・解答例］この種の問題は，まずある程度答えを推測しておいてから，それを証明していくという方針で解くのが普通である．まず，$n^2+1 \geq 1$ であるから，$0 < 1/(n^2+1) \leq 1$ となるので，$\max A = \sup A = 1, \inf A = 0$ であると推測できる．$1 \in A$ であるから，$\max A$ は実際この不等式からただちに従う．($\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ではなく，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を考えている答案がかなり見られた．）$\max A$ が存在すれば $\sup A = \max A$ だから上限も同じ値である．次に，$0 < 1/(n^2+1)$ より 0 が A の下界であることは分かるが，これが実際に最大の下界であることを見てみる．極限計算により $\lim_{n\to\infty} 1/(n^2+1) = 0$ であるから，下界は 0 以下でなければならない．よって 0 が最大下界，すなわち下限である．一方，$0 = 1/(n^2+1)$ を満たす整数 n は存在しないので，A の最小数は存在しない．まとめると，A の最大数，上限はともに 1 であり，A の下限は 0 で，最小数は存在しない．

[2] 実数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ が収束するということの数学的定義を（$\forall, \exists$ などの論理記号，または同等な述語論理を用いて）記述し，さらに，その否定命題を述べよ．

［講評・解答例］実数列 $\{a_n\}$ が収束するというのと，実数列 $\{a_n\}$ が（与えられた）実数 a に収束する，というのとは数学的に異なることに注意する．実際，後者のつもりで解答している答案が大多数であった．a などという量は問題文には与えられておらず，答えにそのように勝手に導入した数が入るということは，明らかに誤答であると認識すべきである．

コーシー列のところでも述べたように，実数列 $\{a_n\}$ が収束する，というのは，ある実数 a が存在して $\{a_n\}$ が収束するということと同値である．(ここで,「ある実数 a」というところが重要である．a は確かに勝手に導入された記号かもしれないが，この記号が特定の意味を持つことはない．このように条件が“ 全称化 ”されていれば，他と紛れのない限り自由に変数を持ってくることが許されるのである．このことは，積分の値 $\int_a^b f(x)dx$ が x という変数の記号によらずに定まることと事情がよく似ている．つまり，$\int_a^b f(t)dt$ と表現しても同じ値と見なされる．もちろん，ここで $\int_a^b f(a)da$ などと書くと混乱をきたすので，この種の注意は常に必要であるが.）

さて，これから論理記号を用いて解答する．与えられた数学的定義は，

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon \in (0,\infty), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{“}n_0 \leq n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\text{”}$$

である．この否定命題を作ると，

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon \in (0,\infty), \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \text{“}n_0 \leq n \ \wedge \ |a_n - a| \geq \varepsilon\text{”}$$

となる．

なお，実際に講義やノートでは，いちいち上のように書くのは面倒くさいので，たとえば

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \leq \forall n, |a_n - a| < \varepsilon$$

などと略記している．あるいは，$\forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$ という主張はしばしば $\forall$ を省略して $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ などと書くことも多い．もしこのような全称記号の運用について不慣れであれば，上に書いたような厳密な記法に従う方が安全である．

なお，上の命題は $\{a_n\}$ がコーシー列であることと同値である．それを用いてコーシー列の定義を書いた者もあったが,「定義」と言われれば標準的な定義を書くのが望ましい．実数の場合はコーシー列であることと，収束列であることがたまたま同値であったが，一般にはコーシー列が収束列であるとは限らない．

[3]

$$a_n = \frac{n+1}{n} \sin \frac{\pi n}{4}$$

で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ の上極限，下極限を求めよ．

［講評・解答例］$\overline{\lim} = \limsup$ を勝手に $\lim_{n\to\infty}(\sup_{n\in\mathbb{N}})$ と解釈している答案がいくつか見られた．$\limsup$ で一つの記号であることに注意せよ．上極限，下極限ともに，ある種の「極限」なのであるから，最初の有限項がどうであろうと変わるような量ではない．今の場合は，$(n+1)/n$ という項がついているのでやや難しくなっているが，次の事実を用いれば気にする必要はないことが分かる．
事実：$a_n = b_n c_n$ で，b_n が 0 でない有限な極限値を持てば，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}\, c_n$$

が成り立つ．証明は簡単なので練習問題としておく．

これに注意すると，$(n+1)/n \to 1$ $(n\to\infty)$ であるから，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sin\frac{\pi n}{4} = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} \sin\frac{\pi n}{4} = -1$$

と計算できる．

[4] a を正の実数とするとき，次の極限値を求めよ：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$$

［講評・解答例］この問題は意外なほど完答者が少なかった．標準的な解法は以下の通りである．

定数 $M > 1$ を任意に固定する．（たとえば，$M = 2$ とでもすればよい．）自然数 n_0 を $Ma \le n_0$ が成り立つように十分大きく取り，固定しておく．すると，$n \ge n_0$ に対して

$$\frac{a^n}{n!} \le \frac{a^n}{n_0^{n-n_0} n_0!} \le \frac{a^n}{(Ma)^{n-n_0} n_0!} = \frac{(Ma)^{n_0}}{M^n n_0!} = \frac{c}{M^n}$$

が成り立つ．ここで，$c = (Ma)^{n_0}/n_0!$ は定数である．$c/M^n \to 0$ $(n\to\infty)$ であるので，挟み打ちの原理から $a^n/n! \to 0$ が従う．

なお，この問題に限らず，$M^{-n} \to 0$ $(n\to\infty)$ のような簡単なことは（それ自体の証明が求められている場合を除いて）わざわざ“ ε‐δ 論法 ”を用いて示すまでもない．解析学の極意は，分かっている部分はできるだけ思考の無駄を省きつつ，本質的な部分は厳密に示す，というバランス感覚である．[3] における極限計算にしても，最終的な答えが出てくる程度に大雑把な計算をするのがコツである．このような感覚は，結局は訓練によって身につけるしかないので，日頃の努力を怠らないようにすることが肝要である．

[5] 実数 x_0 のある近傍で定義された函数 $f(x), g(x)$ が，$x \to x_0$ のときともに極限を有するならば，

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

が成り立つことを示せ．

［講評・解答例］どういうわけか，数列の極限と混同しているらしい答案，$x \to +\infty$ の時の極限と混同しているらしい答案が多くみられた．定義に従うだけだが，きちんと対応する定義を参照することが必要である．

$f(x), g(x)$ の $x \to x_0$ の時の極限をそれぞれ a, b と表す．与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して（ε を半分ずつに分けて）

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon/2,$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon/2$$

となる．そこで，$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とすれば，$0 < |x - x_0| < \delta$ に対して

$$|(f(x)+g(x)) - (a+b)| \le |f(x) - a| + |g(x) - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となり，$f(x) + g(x) \to a + b$ $(x \to x_0)$ が示された．

[6] 次の式で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束列であることを示せ．

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

［講評・解答例］これは交代級数と呼ばれるものの典型である．収束性を示すには，単調性をうまく利用する方法と，コーシー列であることを示す方法とがある．ここでは単調性を用いる方法を紹介する．まず，

$$a_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)}$$

であるから，a_{2n} は単調増加数列である．一方，$n > 1$ に対して

$$a_{2n} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} < \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k(2k-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{3}{4}$$

なので，上に有界でもある．従って，a_{2n} は収束列である．一方，$a_{2n-1} = a_{2n} + 1/(2n)$ であり，$1/(2n) \to 0$ なので，a_{2n-1} も a_{2n} と同じ極限値を持つ収束列であり，したがって a_n も収束列である．

[7] 次の二つの値を計算して比較せよ．ただし $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とする．

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{mn}{m^2+n^2}, \quad \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{mn}{m^2+n^2}.$$

［講評・解答例］計算そのものは高校程度のはずであるが，どういうわけか正解者はいなかった．まず相加相乗平均の関係から $m^2+n^2 \geq 2mn$ であるから，$mn/(m^2+n^2) \leq 1/2$ で，等号は $m=n$ の時成立する．よって，$\sup_{m\in\mathbb{N}} mn/(m^2+n^2) = 1/2$. これより，

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{mn}{m^2+n^2} = \frac{1}{2}$$

が得られる．一方，$mn/(m^2+n^2) > 0$ であり，$n \to \infty$ のとき，$mn/(m^2+n^2) \to 0$ であるから，$\inf_{n\in\mathbb{N}} mn/(m^2+n^2) = 0$，よって

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{mn}{m^2+n^2} = 0$$

が得られる．

一般に，$a_{m,n}$ を二重数列として，自明な不等式

$$a_{m,n} \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n}$$

の両辺の n に関する下限を取れば

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n}$$

である．さらに左辺は m について任意だから，m に関して上限を取って

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\in\mathbb{N}} a_{m,n} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\in\mathbb{N}} a_{m,n}$$

が得られる．上の例は，一般にはこの不等式は等号には出来ないことを教えている．

[8] 実数 $0 < a < b$ に対して，二つの数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$，$\{b_n\}_{n=1,2,\dots}$ を初期条件 $a_1 = a, b_1 = b$ および次の漸化式で順次定義する：

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

このとき，$\{a_n\}$ は単調増加，$\{b_n\}$ は単調減少であり，これらの極限が一致することを証明せよ．（この共通の極限値を a, b の算術幾何平均 (arithmetic-geometric mean) と呼び，しばしば $AGM(a,b)$ などと表す．）

［講評・解答例］まず，$a_n \leq b_n$ であることを帰納法で証明する．$n=1$ の時は仮定より明らか．n のとき成り立つと仮定すると，相加相乗平均の関係から

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}$$

であるから，$n+1$ のときも成り立つ．よって示された．

さらに，$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ より $\{a_n\}$ は単調増加数列である．また，$b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \leq b_n$ より $\{b_n\}$ は単調減少数列．しかも $a_n \leq b_n \leq b_1 = b, b_n \geq a_n \geq a_1 = a$ だから，これらは有界でもある．従って a_n, b_n ともに正値有限な極限値を持つ．それぞれ α, β としてみよう．関係式 $2b_{n+1} = a_n + b_n$ において $n \to \infty$ とすれば $2\beta = \alpha + \beta$ を得るが，これより $\alpha = \beta$ が従う．

ちなみに，パソコンなどで実験してみればすぐに分かるが，この共通の極限値 $AGM(a,b) = \alpha = \beta$ への収束は非常に早い．一方，Gauss により示されたことだが，この値は楕円積分を用いて表される．この原理を用いて，楕円積分の数値計算を高速に行うことができる．