期末試験　　解答例

[1] $0 < \alpha < 1$ とするとき，次の広義積分の値を求めよ：

$$\int_{0+}^{1} \frac{\log x}{x^\alpha} dx$$

［解答例］高校で習ったように，$\log x$ を微分する方向で部分積分するとよい.（$t = \log x$ と変数変換してもよいが，結局部分積分しなければならないことに変わりはない.）ただし，広義積分なのでその点に注意する．まず $0 < \delta < 1$ に対して

$$\int_{\delta}^{1} \frac{\log x}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \log x\right]_{\delta}^{1} - \int_{\delta}^{1} \frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha} dx = -\frac{\delta^{1-\alpha}\log\delta}{1-\alpha} - \frac{1-\delta^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}.$$

ここで，$0 < 1-\alpha$ より，$\delta \to 0+$ とすれば $\delta^{1-\alpha}\log\delta \to 0$ であるから，

$$\int_{0+}^{1} \frac{\log x}{x^\alpha} dx = \frac{-1}{(1-\alpha)^2}$$

が得られる.

[2] 次の広義積分の収束性および絶対収束性を調べよ：

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

［解答例］この積分は収束が微妙な典型例である．そのような場合，部分積分がしばしば威力を発揮することを憶えておくと良い．この場合，無限遠では $1/x$ の積分が発散するのがネックだが，これを微分したものは積分可能であることに注意すれば，こちらを微分する方向で部分積分を行えば良いと判断できる．$M > \pi$ として，

$$\int_{\pi}^{M} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{-\cos M}{M} + \frac{\cos\pi}{\pi} - \int_{\pi}^{M} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

ここで $M \to \infty$ とすると，第一項は明らかに 0 に収束する．一方，最後の項は $|\cos x| \le 1$ に注意すれば

$$\left|\int_{\pi}^{M} \frac{\cos x}{x^2} dx\right| \le \int_{\pi}^{M} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \le \int_{\pi}^{M} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{M} < \frac{1}{\pi}$$

となり絶対収束することが分かる．よって，与えられた積分は収束する.

一方，この積分は絶対収束しない.

[3] 次の極限値を求めよ：

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

［解答例］この極限値はロピタルの定理の反復利用でも求められるが，3 回くらい繰り返さないといけないので結構たいへんである．それに較べて，級数展開を用いる方法は計算が比較的楽である.（ロピタルの定理は級数展開ができない場合にも適用可能な点にメリットがある.）以下，ランダウ記号はすべて $x \to 0$ の意味で用いる. $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$ だから，分母は $x - \sin x = x^3/6 + O(x^5)$ となり，3 位の無限小であることが分かる．よって 3 次くらいまでのテイラー展開を使えば十分であることが分かる．$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + O(x^4)$ に上の $\sin x$ の展開を代入して，

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right) + \frac{(x+O(x^3))^2}{2} + \frac{(x+O(x^3))^3}{6} + O(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

を得る．引き算して $e^x - e^{\sin x} = x^3/6 + O(x^4)$ を得るので，最終的に

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \frac{x^3/6 + O(x^4)}{x^3/6 + O(x^5)} = \frac{1 + O(x)}{1 + O(x^2)}$$

となり，求める極限値が 1 であることが結論できる.

なお，実はこの極限の形に注意すれば，次のようなもっと単純な解答も可能である.（ただし，これは本来の出題意図とは異なるので，このような技巧的な解答は思いつかなくてもよい.）

［別解］$f(t) = e^t, a = \sin x, b = x$ に対して平均値の定理を適用すれば，各 x に対してある $\theta = \theta_x$ が区間 $(0,1)$ 内に存在して

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a + \theta(b-a)) = e^{\sin x + \theta_x(x - \sin x)}$$

となる．$x \to 0$ とすれば，この右辺が 1 に近づくのは明白.

数）の形に書けるが，この係数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 をすべて求めよ．

［解答例］テイラーの公式を使っても係数は計算できるが，かなり面倒である．以下のようにするのが効率的である．$t = x - x^2$ とおけば，これは $x \to 0$ のとき無限小 $O(x)$ である．よって，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + O(t^5) \\ &= 1 + (x - x^2) + (x - x^2)^2 + (x - x^2)^3 + (x + O(x^2))^4 + O(x^5) \\ &= 1 + x + (-1+1)x^2 + (-2+1)x^3 + (1-3+1)x^4 + O(x^5) = 1 + x - x^3 - x^4 + O(x^5) \end{aligned}$$

となる．したがって，$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = -1$ となる．

[5] $a > 0$ を定数とするとき，次の正項級数の収束・発散を調べよ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} a^n$$

［解答例］$a_n = (n!)^2 a^n/(2n)!$ とすると，形から隣接項の比を取るのが吉である．

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{an^2}{2n(2n-1)} = \frac{a}{4}\frac{n}{n-1/2}$$

であるから，$a_n/a_{n-1} \to a/4\ (n \to \infty)$ である．よって，ダランベールの判定法より $a < 4$ ならば収束する．一方，$a \geq 4$ ならば $n/(n-1/2) > 1$ より $a_n > a_{n-1}$ となり，収束のための必要条件 $a_n \to 0$ を満たさないので，この場合は発散する．（$a > 4$ ならば，ダランベールの判定法がやはり利用できるが，$a = 4$ の場合はダランベールの判定法が適用できないことに注意せよ．）

[6] 関数列 $f_n(x) = nxe^{-nx}$，$n = 1, 2, 3, \ldots,$ は区間 $I = [0, +\infty)$ において 0 に各点収束することを示せ．また，この収束は I において一様か？

［解答例］$f(x) = xe^{-x}$ とおけば，与えられた関数列は $f_n(x) = f(nx)$ と表されることに注意する．$f(x) \to 0\ (x \to \infty)$ となるので，$x > 0$ のとき $f_n(x) = f(nx) \to 0$ となるのは明らか．一方，f_n の最大値ノルムは $\|f_n\| = \sup_{x\geq 0} f_n(x) = \sup_{x \geq 0} f(x) = f(1) > 0$ なので，f_n は 0 に一様収束しない．（実際，$x_n = 1/n$ とすれば，$f_n(x_n) = f(1)$ だからこれは 0 に収束しない．）

[7] 次のベキ級数の収束半径を求めよ：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

［解答例］コーシー・アダマールの公式を使えば一発だが，ここでは収束半径の定義に戻って求めてみる．$|x| < 1$ とすると，$|x| < q < 1$ なる実数 q を取れば $n^3(|x|/q)^n \to 0\ (n \to \infty)$ だから，特にある実数 $M > 0$ が存在して，任意の n に対して $n^3(|x|/q)^n \leq M$ となる．よって，$n^3|x|^n \leq Mq^n$ で，$\sum q^n < \infty$ なので，優級数の原理から $\sum n^3|x|^n < \infty$ が分かる．

一方，$|x| > 1$ ならば，$n^3|x|^n \to \infty$ となるので，この場合は級数は決して収束しない．よって，境目の $r = 1$ が収束半径である．

[8] $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ を連続関数とし，広義積分 $\int_0^\infty f(x)dx$ が存在すると仮定する．自然数 n に対して

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-\alpha x} f(x)dx$$

と定めるとき，$F_n(\alpha)$ は関数 $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx$ に $0 \leq \alpha \leq 1$ において一様収束することを示せ．

［解答例］仮定より $\lim_{M\to\infty} \int_M^\infty f(x)dx = 0$ であるから，任意に与えられた正数 ε に対して，$M > 0$ を十分大きく取って，関数 $g(x) = \int_M^x f(t)dt$ が $M \leq x < \infty$ において不等式 $|g(x)| < \varepsilon$ を満たすようにすることができる．すると，部分積分により $\alpha > 0, n > M$ に対して

$$F(\alpha) - F_n(\alpha) = \int_n^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx = -e^{-\alpha n} g(n) + \alpha \int_n^\infty e^{-\alpha x} g(x)dx$$

となる．よって，

$$|F(\alpha) - F_n(\alpha)| \leq e^{-\alpha n}|g(n)| + \alpha \int_n^\infty e^{-\alpha x}|g(x)|dx \leq \varepsilon e^{-\alpha n} + \alpha \int_n^\infty e^{-\alpha x} \varepsilon dx = 2\varepsilon e^{-\alpha n} < 2\varepsilon$$

となる．$\alpha = 0$ のときは，$F(0) - F_n(0) = \lim_{x\to\infty} g(x) - g(n)$ より $|F(0) - F_n(0)| \leq 2\varepsilon$ が言えるので，$n > M$ に対して $\sup_{0\leq\alpha\leq 1} |F(\alpha) - F_n(\alpha)| \leq 2\varepsilon$ となる．これは F_n が F に $[0, 1]$ 上で一様収束することを意味する．