平成 17 年度 解析学 II　（担当：須川）

中間試験 解答例および講評

[1] リーマン積分の定義を用いて次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{1/n}$$

［解答例］題意はリーマン積分の定義を用いてということで，当初は次のような解答を期待した：
対数を考えると

$$\log\frac{1}{n}(n!)^{1/n}=\frac{1}{n}\log n!-\log n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}$$

となる．最後の項は形式的には関数 $\log x$ に関する区間 $[0,1]$ におけるリーマン和の形だから，$n\to\infty$ のとき

$$\int_0^1\log x dx=[x\log x]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx=-1$$

に収束する．関数 $e^x=\exp x$ は連続だから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(n!)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\exp\log\frac{1}{n}(n!)^{1/n}=\exp\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{n}(n!)^{1/n}=\exp(-1)=e^{-1}$$

を得る．

しかし，出てくる積分はよく見ると広義積分であり，中間試験を行った時点では試験範囲外であった．教科書でも広義積分が出てくる手前にこの計算が問として出てくるので，当方のみに責任があるわけではないが，いずれにせよこれは出題ミスであった．よって，上記の解答でも減点はしていないが，通常のリーマン和ではないので実際には注意が必要である．

試験後の講義では，次の形の定理を紹介したが詳しい証明を与える時間はなかった．この場を借りて証明しておこう．この定理から，上の計算が正当化される．

定理. 関数 f は，区間 $(a,b]$ において単調かつ連続で，広義積分可能であるとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a+k(b-a)/n)=\int_{a+}^{b}f(x)dx$$

が成り立つ．

［証明］どちらでも同じことなので，f は単調非増加であると仮定する．さらに（必要なら $f(x)-f(b)$ を考えることによって）$f(x)\geq 0$ としてよい．まず，$a<a'<b$ をとると，$a<x<a'$ ならば $f(x)\geq f(a')$ であるから，

$$0\leq(a'-a)f(a')\leq\int_{a+}^{a'}f(x)dx$$

となるが，広義積分可能性からこの最右辺の積分は $a'\to a$ のとき 0 に収束する．よって挟み打ちの原理により

$$\lim_{a'\to a}(a'-a)f(a')=0 \tag{1}$$

であることが分かる．

次に，$x_k=a+k(b-a)/n$ とすれば，$x_k\leq x\leq x_{k+1}$ に対して $f(x_k)\geq f(x)\geq f(x_{k+1})$ である．辺々をこの区間で積分して

$$\frac{b-a}{n}f(x_k)\geq\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx\geq\frac{b-a}{n}f(x_{k+1})$$

を得る．$k=1,2,\dots,n-1$ まで足し合わせて，

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \geq \int_{a+(b-a)/n}^{b} f(x)dx \geq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=2}^{n} f(x_k)$$

が得られる．これを変形して

$$\frac{b-a}{n} f(a+(b-a)/n) \geq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_{a+(b-a)/n}^{b} f(x)dx \geq \frac{b-a}{n} f(b)$$

が得られるが，明らかに $(b-a)f(b)/n \to 0$ であり，(1) 式から $(b-a)f(a+(b-a)/n)/n \to 0$ でもあるので，真ん中の項は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よって定理が示された．

[2] 関数 $1/(1+x^3)$ の原始関数を一つ求めよ．

［解答例］基本的には正しい方針で解答を試みた答案が多かったが，やはり計算を間違えずに正答に到達するのは容易ではなかったようである．積分計算の場合は，正しいかどうか確認するには，微分してみればよい．当たり前のことのようだが，これが出来る人が意外に少ないようである．

まず $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$ なので，これを用いて部分分数分解を行う．分母の次数の方が分子の次数より高いので，A,B,C を未定係数とし，

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2}$$

とおける．分母を払って，

$$1 = A(1-x+x^2) + (Bx+C)(1+x)$$

を得る．$x=-1$ を代入して $3A=1$, すなわち $A=1/3$ を得る．次に $x=0$ とすれば，$1=A+C$ より $C=2/3$ を得る．最後に x^2 の係数を比較して $A+B=0$ を得るので，$B=-1/3$ を得る．まとめると，

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{1-x+x^2}\right)$$

となる．$(1-x+x^2)' = -1+2x$ であるから，

$$\frac{x-2}{1-x+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1+2x}{1-x+x^2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}$$

と変形できる．最後の項の積分は $x-1/2=\sqrt{3/4}t$ と置換積分して

$$\int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}dx = \int \frac{1}{3/4(t^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

と計算できる．したがって，最終的に

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\log|1+x| - \frac{1}{6}\log(1-x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

が得られる．よって，

$$\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

が原始関数の一つである．

[3] $\sqrt{1+x^2}=t-x$ として置換積分することにより，次の公式を証明せよ．(右辺を微分して左辺を導いても正解とはしない．)

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\right)$$

［解答例］これもヒントが十分与えられている割には意外に手強い問題である．置換により x を t に書き換えることになるが，その際 t を定数と思って計算するなどの誤答が散見された．(さすがに，

x を定数と思う答案はなかったが，これは習慣によるものであろう．数学では，一切の先入観を捨てて真っ白な頭で考えることが重要であることの一つの証左とも言える.）

さて，$\sqrt{1+x^2} = t - x$ の両辺を二乗すると $1 + x^2 = (t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2$ より，$2x = t - 1/t$ という関係式が得られる．特に $2dx = (1+t^{-2})dt$ となる．これより，

$$2\int\sqrt{1+x^2}dx = 2\int(t-x)dx = 2\int tdx - x^2 = \int t(1+t^{-2})dt - x^2 = \frac{t^2}{2} - \log|t| - x^2$$

となる．$t = x + \sqrt{1+x^2}$ なので $t^2 = 1 + 2x\sqrt{1+x^2} + 2x^2$ となり，これを代入すれば（定数の差を除いて）所期の式が得られる．

[4]

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

と定める．整数 $n > 0$ に対して，$f_n(x)$ を $f_{n-1}(x)$ を用いて表せ．

［解答例］以下を見れば分かるように，$n = 1$ の時と $n > 1$ の時とで場合分けが必要である．これは引っかけ問題のつもりで出題したわけではなく，単純に気がつかなかっただけである．問題として数学的に誤りはないが，不適切ではあったかもしれない．ということで，$n = 1$ の場合を別に扱わなくても特に減点はしていない．なお，これは講義中に各自チェックするように言っておいた計算である．日頃，講義中の計算を後できちんとフォローしているかどうかによって勝敗が分かれたかもしれない．

部分積分により，

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left[t(1+t^2)^{-n}\right]_0^x - \int_0^x t\cdot\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{(t^2+1)-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(f_n(x) - f_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

よって，$n > 0$ ならば f_{n+1} について解くことができ，

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}f_n(x) \quad (n \geq 1)$$

が得られる．n を一つ下げれば，

$$f_n(x) = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^n} + \frac{2n-3}{2n-2}f_{n-1}(x) \quad (n \geq 2)$$

が得られる．

しかし，これは $n = 1$ の場合をカバーしていない．その場合は直接に計算する．$f_1(x) = \arctan x$ を答えとしても良いが（この場合，$f_0(x)$ は現れない），$f_0(x) = x$ に注意すれば，$f_1(x) = \arctan f_0(x)$ と無理矢理 f_0 を用いて表すことも可能である．

[5] 区間 $[a,b]$ において関数 $f(x), g(x)$ は連続とし，$g(x) > 0$ が成り立つとする．このとき，ある ξ が開区間 (a,b) 内に存在して

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

を満たすことを示せ．

［解答例］$g(x) \equiv 1$ の場合は講義でも説明したが，これはより一般の場合に対応する.（ラグランジュの平均値定理に対する，コーシーの平均値定理のようなもの．実際に，コーシーの平均値定理を使って示すこともできる.）証明は，講義で用いた方法を敷衍すればよい．

区間 $[a,b]$ は有界かつ閉であるから，$f(x)$ はそこで最大値・最小値を取る．それらをそれぞれ M,m とすると $m \le f(x) \le M$ である．$g(x)$ をかけても不等号は変わらないので，$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ を得て，これを $a \le x \le b$ で積分すれば，

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

を得る．$\lambda = \int_a^b f(x)g(x)dx / \int_a^b g(x)dx$ とおけば，$\int_a^b g(x)dx > 0$ に注意して $m \le \lambda \le M$ を得るが，一方，中間値の定理を用いれば，ある $\xi \in (a,b)$ に対して $\lambda = f(\xi)$ となることが分かる．よって主張が示された．

なお，ここで M,m は最大・最小値に取ったことが重要である．実際，中間値の定理を用いるところでは，厳密には以下のような議論を用いている．実際に最大・最小を与える点が存在するので，$M = f(c), m = f(d)$ となる c,d が区間 $[a,b]$ 内に存在する．そこで，c,d を端点とする区間について中間値の定理を適用すればよい．

[6] 関数 $f(x) = \sin(1/x)$ は区間 $(0,1)$ において一様連続かどうか調べよ．

［解答例］意外に一様連続であることを示そうとして失敗している答案が多かった．有界開区間で一様連続ならば，区間の端点まで連続に拡張でき，その逆も成り立つという結果があったことを思い出そう．この場合は明らかに $x = 0$ には連続に拡張できそうにない．本質的には，どうして連続に拡張できないかをじっと眺めれば正答に至ることができる．

関数 $f(x)$ が $(0,1)$ において一様連続であるとは，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, \forall y \in (0,1) : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．これの否定命題は

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x, \exists y \in (0,1) : |x-y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| \ge \varepsilon$$

である．これを示そう．

n を自然数として，$x_n = 1/(2\pi n)$ とおけば，$f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0$ である．一方，$y_n = 1/(2\pi n + \pi/2)$ とおけば，$f(y_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$ である．そこで，$\varepsilon = 1$ とすれば，任意の $\delta > 0$ に対して n を十分大きくとれば

$$|x_n - y_n| = \frac{\pi/2}{2\pi n(2\pi n + \pi/2)} < \delta$$

とできる．一方，$|f(x_n) - f(y_n)| = |0 - 1| = 1 \ge \varepsilon$ であるから，否定命題が示された．つまり，f は $(0,1)$ において一様連続ではない．