数理解析学Ｂ／数理解析基礎講義Ｂ　期末レポート問題

（須川 敏幸 担当，2005 年 2 月 1 日出題）

レポート問題

以下の問題，あるいは講義中に「演習」として出題した問題の中から，2 問程度を選んで解答せよ．提出期限は 2005 年 2 月 14 日 (月) までとする．数学事務室または須川の研究室まで提出のこと．

[1] $g \in \Sigma$ とし，

$$\Gamma_g(z,\zeta) = \frac{z\zeta g'(z)g'(\zeta)}{(g(z)-g(\zeta))^2} - \frac{z\zeta}{(z-\zeta)^2} \quad (z \neq \zeta)$$

と定める．このとき，実は Γ_g は $\Delta \times \Delta$ 上の（２変数）解析函数に拡張されることを示し，

$$\Gamma_g(z,z) = 6z^2 S_g(z), \quad S_g = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2$$

と表せることを証明せよ．ただし，ここで $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ とする．

[2] 前問の状況を仮定する．自然数 n と任意の点 $z_1, \ldots, z_n \in \Delta, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left|\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \lambda_k \Gamma_g(z_j, z_k)\right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \bar{\lambda}_k \frac{z_j \bar{z}_k}{(z_j \bar{z}_k - 1)^2}.$$

[3] $f : \mathbb{D} \times [0,1] \to \mathbb{D}$ について，各 $t \in [0,1]$ に対して $f(z,t)$ は z の正則函数であり，各 $z \in \mathbb{D}$ に対して $f(z,t)$ は t の連続函数であるとする．このとき，$f(z,t)$ および $f'(z,t) = (\partial f/\partial z)(z,t)$ は (z,t) について（２変数）連続函数であることを証明せよ．（ヒント：コーシーの積分公式を用いる．）

[4] $f \in \mathcal{A}$ とし，ある定数 $c \in \mathbb{C}$ で $|c| \leq 1, c \neq -1$ を満たすものに対して

$$\left|(1-|z|^2)z\frac{f''(z)}{f'(z)} + c|z|^2\right| \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}$$

が成り立つならば，$f \in \mathcal{S}$ であることを示せ．（$f(e^{-t}z) + (1+c)^{-1}(e^t - e^{-t})zf'(e^{-t}z)$ を考えよ．）

[5] Löwner の定理の一つ前の定理（1 月 25 日の講義）における次の主張に（定理の仮定の下で）証明を与えよ：

$$\lim_{t\to+\infty} e^t \varphi_{t,s}(z) = f_s(z)$$

は $\mathbb{D}$ 上の広義一様極限として存在し，$\{f_s\}_{s\geq 0}$ は Löwner 鎖となる．