数理解析学Ｂ／数理解析基礎講義Ｂ　中間レポート 問題

（須川 敏幸 担当，2004 年 11 月 30 日出題）

レポート問題

以下の問題，あるいは講義中に「演習」として出題した問題の中から，3 問程度を選んで解答せよ．提出期限は 2004 年 12 月 18 日 (金) までとする．数学事務室に提出のこと．

[1] 単位円板上の正則函数 $f(z) = z/(1-z^2)$ は星状であることを証明し，またその像領域 $f(\mathbb{D})$ の形を求めよ.（ヒント：円周上の点 $z = e^{i\theta}$ の像を追跡せよ）

[2] 指数函数 e^z は円板 $|z| < \pi$ においては単葉であるが，それより大きないかなる円板 $|z| < R$ $(R > \pi)$ においても単葉でないことを示せ.

[3] 函数 $f(z) = z + cz^2$ が単位円板 $\mathbb{D}$ 上で単葉であるための必要十分条件は $|c| \leq 1/2$ であることを証明せよ.

[4] $f(z) = \log(1 + z)$ が凸状であることを示し，その像領域の概形を描け.

[5] $0 < \rho \leq 2 - \sqrt{3}$ とする．任意の $f \in \mathcal{S}$ は，円板 $|z| < \rho$ を凸領域に等角写像することを示せ.（ヒント：$\mathrm{Re}\,(1 + zf''(z)/f'(z)) > 0$ を $|z| < \rho$ で成立することを見る.）

[6] 函数 $f \in \mathcal{A}$ が $\mathrm{Re}\,((1-z^2)f'(z)) > 0,\ |z| < 1,$ を満たせば $f \in \mathcal{S}$ となることを示せ.（ヒント：実際には f が近接凸であることを見よ.）

[7] $f \in \mathcal{S}$ が凸状であれば，次の増大度定理が成り立つことを示せ：

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}, \quad |z| = r < 1$$

参考

単葉函数論に関する日本語の参考書はほとんどないが，たとえばかなり古い本だが，小松勇作 著「等角写像論 （上・下）」にはかなり充実した記述が見られる．また，辻正次 著「複素函数論」にも単葉函数論についての１章がある．関連する資料として，拙著の資料「正則函数の単葉性と擬等角拡張性」が次のサイトからダウンロード可能である．

http://sugawa.cajpn.org/books.html